Clasa a VIII-a

Soluţii

Problema 1

a) Avem $a^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ şi $b^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$, deci $a^2 + b = a + b^2 = \frac{5}{4} \in \mathbf{Q}$.

b) Avem $a^2 + b - (b^2 + a) \in \mathbf{Q}$ deci $(a-b)(a+b-1) \in \mathbf{Q}$. Deoarece $a + b - 1 \neq 0$ este un număr raţional, rezultă că $a - b \in \mathbf{Q}$. Cum $a + b \in \mathbf{Q}$ deducem că $2a, 2b \in \mathbf{Q}$ de unde $a, b \in \mathbf{Q}$.

c) Există $k \in \mathbf{Q} \setminus \{0, 1\}$ astfel încât $a = bk$. Atunci $b(1 + k^2 b) \in \mathbf{Q}$ şi $b(b+k) \in \mathbf{Q}$, de unde $\frac{1+k^2 b}{b+k} = r \in \mathbf{Q}$. Dacă $r = k^2$, atunci $k^3 = 1$. Obţinem $k = 1$ şi $a = b$, contradicţie. Prin urmare, $r \neq k^2$, de unde $b = \frac{1-rk}{r-k^2} \in \mathbf{Q}$ şi apoi $a = \frac{a}{b} \cdot b \in \mathbf{Q}$.

Punctaj recomandat: a) 2 puncte; b) 3 puncte; c) 2 puncte.

Problema 2

a) Avem $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = (a-b)(a+b) + (c-d)(c+d) \geq a + b + c + d = 2004$. Dacă $a - b > 1$ sau $c - d > 1$, atunci $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 > 2004$. Rezultă $a - b = 1, c - d = 1$, adică $b = a - 1, d = c - 1$. Atunci

$$a + b + c + d = 2a + 2c - 2 = 2004,$$

de unde $a + c = 1003$. Cum $a > c$ rezultă $a \geq 502$. Dacă $a = 503$, atunci $b = 501, c = 501, d = 500$, deci $b = c$, ceea ce nu convine problemei.

Pentru $a = 503$ avem $b = 502, c = 500, d = 499$.

b) Valoarea maximă a lui a se obţine pentru cea mai mică valoare a lui d. Dacă $d = 1$ atunci $c = 2$, $a = 1001$. Prin urmare $a \in \{503, 504, \ldots, 1001\}$. Deci a poate lua $1001 - 503 + 1 = 499$ valori.

Observăm că fiecare valoare a lui a din mulţimea $\{503, 504, \ldots, 1001\}$ este admisibilă; într-adevăr, considerăm $b = a - 1$, $c = 1003 - a, d = 102 - a$ şi avem $a > b > c > d$ cu proprietăţile cerute.

Punctaj recomandat: a) 4 puncte; b) 3 puncte.

Problema 3

a) Orice mulţime aritmetică este de forma $B = \{a, a+r, a+2r\}$ cu $a \geq 1, r \geq 1$. Cum $a + 2r \leq 10$ obţinem $r \leq 4$.

Pentru $r = 1$ rezultă $a \leq 8$, deci există 8 mulţimi aritmetice de forma $\{a, a+1, a+2\}$, $a \in \{1, 2, \ldots, 8\}$.

Pentru $r = 2$ rezultă $a \leq 6$, deci există 6 mulţimi aritmetice de forma $\{a, a+2, a+4\}$, $a \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Pentru $r = 3$, rezultă $a \leq 4$. Deci există 4 mulţimi aritmetice de forma $\{a, a+3, a+6\}$ cu $a \in \{1, 2, 3, 4\}$.

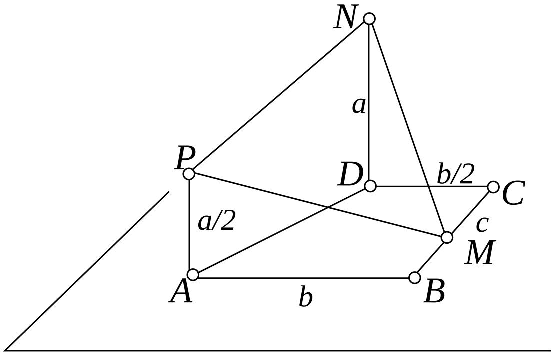
Pentru $r = 4$ rezultă $a \leq 2$ deci există 2 mulţimi aritmetice: $\{1, 5, 9\}$ şi $\{2, 6, 10\}$.

Există deci 20 de submulţimi aritmetice ale lui A_{10}

b) Fie $B = \{a, a+r, a+2r\}$ o multţime aritmetică. Cum pentru $r \leq 45$ şi $1 \leq a \leq 91 - 2r$, rezultă că $B \subset A_n$, atunci pentru fiecare $r \in \{1, 2, \ldots, 45\}$ avem cel puţin $91 - 2r$ submulţimi aritmetice. Rezultă că există $1 + 3 + 5 + \cdots + 89 = 2025$ astfel de submulţimi.

Punctaj recomandat: a) 3 puncte; b) 4 puncte.

Problema 4



a) Proiecţia triunghiului PMN pe planul (ABC) este triunghiul AMD. Rezultă

$$\cos\alpha = \frac{S_{AMD}}{S_{PMN}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

unde α este unghiul considerat.

b) Notăm $AB = b$ şi $BC = c$. Cum triunghiul MNP este echilateral, rezultă că

$$b^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + a^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4},$$

de unde $a = b = c$.

Dacă O este mijlocul segmentului $[MN]$, atunci $PO \perp (DMN)$, de unde $(PNM) \perp (DMN)$. Dacă $DF \perp NM$, $F \in NM$, atunci $DF \perp (MNP)$.

$$DF = \frac{DN \cdot DM}{NM} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Punctaj recomandat: a) 4 puncte; b) 3 puncte.